Petit tutoriel sur les filtres CIC*

J. Arzi

Courriel : `contact AT tsdconseil.fr`

1er Décembre 2015

Avant-propos

Les filtres CIC sont très utilisés dans les applications où l'on a besoin de changer la fréquence d'échantillonnage d'un signal dans un rapport important, que ce soit pour la décimation (réduction de la fréquence d'échantillonnage : par exemple systèmes d'acquisition sur-échantillonnés, ADC $\Sigma\Delta$) ou l'interpolation (DAC).

L'avantage de ces filtres est qu'ils sont particulièrement économes en terme de complexité (aucune multiplication, seule des intégrateurs et des différenciateurs sont nécessaires).

En contrepartie de cette simplicité, ils présentent quelques restrictions (par exemple en terme de dimension des registres de calcul) et défauts (notamment en terme de réponse dans la bande passante et de repliement de spectre), qui seront traités ici.

Note : Toutes les figures et simulations de ce tutoriel ont été générées sous SCILAB, avec la mini-boite à outils CIC. Vous pouvez télécharger ces outils gratuits ici :

- **SCILAB** (logiciel de calcul numérique) **:** `http://www.scilab.org`
- **Boite à outils CIC** (pour SCILAB :) `http://www.tsdconseil.fr/log/scriptscilab/cic/index.html`

*La version la plus récente de ce document est disponible à cette adresse : `http://www.tsdconseil.fr/log/scriptscilab/cic/index.html`

Table des matières

1 Définition du filtre CIC

Un filtre CIC n'est rien d'autre qu'une succession de N (ordre du filtre) moyennes mobiles de largeur RM (R est le facteur de décimation ou d'interpolation, et M est un paramètre libre qui vaut typiquement 1 ou 2). Chaque moyenne mobile est un filtre FIR très simple définit par :

$$y_n = \frac{1}{RM} \cdot \sum_{i=0}^{RM-1} x_{n-i}$$

c'est-à-dire que chaque échantillon de sortie est calculé comme la moyenne des RM derniers échantillons d'entrée. Par conséquent, la fonction de transfert globale (c'est à dire des N étages successifs de moyenne mobile) d'un filtre CIC est :

$$h(z) = \left(\frac{1 + z^{-1} + \cdots + z^{-(RM-1)}}{RM} \right)^N$$

En terme de réponse fréquentielle, puisque la transformée de Fourier d'une porte (moyenne mobile) est un sinus cardinal, la réponse globale est :

$$|H(\nu)| = \left| \frac{\sin(RM\pi\nu)}{RM \sin \pi\nu} \right|^N$$

où $\nu = f/f_s$ est la fréquence normalisée par rapport à la fréquence d'échantillonnage ($\nu = 0.5$ correspond à la fréquence de Nyquist).

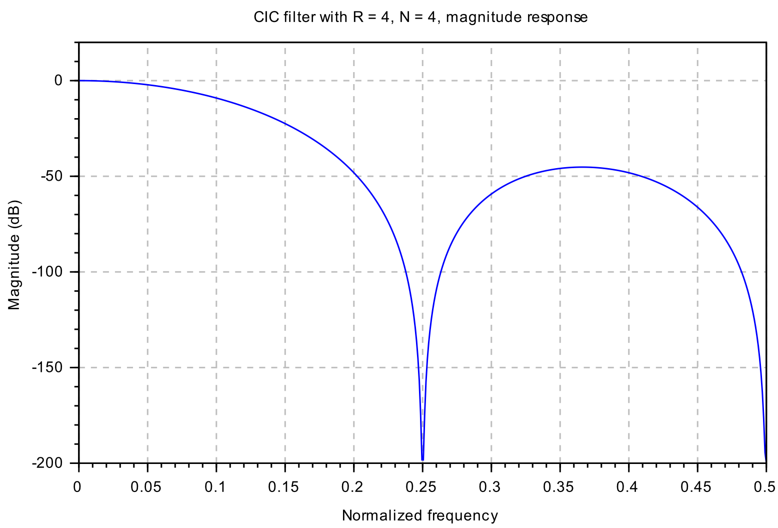

FIGURE 1 – *Exemple de filtre CIC, avec* $R = 4$, $N = 4$ *et* $M = 1$

Comme on peut le voir sur la figure 1 ci-dessus, le premier zéro est situé à $\nu_0 = 2 \cdot \frac{1}{RM}$, c'est-à-dire deux fois la fréquence de Nyquist de sortie si $M = 1$ (pour un décimateur).

2 Filtre CIC pour la décimation

2.1 Principe

Quand on souhaite réduire la fréquence d'échantillonnage d'un signal, on ne peut pas simplement éliminer des échantillons. En effet, en faisant cela, le spectre des hautes fréquence se replie sur le spectre basse fréquence, et donc des signaux artificiels sont produits. Aussi, avant de décimer (c'est-à-dire de supprimer des échantillons), on applique un filtre passe-bas (ici CIC) pour supprimer toutes les hautes fréquences (c'est-à-dire, dans la mesure du possible, toutes les fréquences supérieures à la fréquence de Nyquist de sortie).

Signal haute fréquence (f_s) $\longrightarrow \boxed{h(z)} \longrightarrow \boxed{\downarrow R} \longrightarrow$ Signal basse fréquence (f_s/R)

Cependant, dans cette implémentation naïve le filtre CIC $h(z)$ doit fonctionner à la fréquence d'échantillonnage la plus élevée, qui peut être très importante. Une implémentation plus efficace consiste à factoriser la fonction de transfert de ce filtre ainsi :

$$h(z) = \left(\frac{1 - z^{-RM}}{1 - z^{-1}}\right)^N = \left(\frac{1}{1 - z^{-1}}\right)^N \cdot \left(1 - z^{-RM}\right)^N$$

Le premier terme correspond à N étage d'intégrateurs, et le deuxième terme correspond à N peignes de largeur RM, qui peuvent donc être déplacés après la décimation d'un facteur R (pour devenir de simples différenciateurs dans le cas courant où $M = 1$) :

$$\boxed{\tfrac{1}{1-z^{-1}}} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \boxed{\tfrac{1}{1-z^{-1}}} \longrightarrow \boxed{\downarrow R} \rightarrow \boxed{1 - z^{-M}} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \boxed{1 - z^{-M}}$$

Attention : Cette implémentation particulière d'une séquence de moyennes mobiles ne fonctionne qu'en virgule fixe, car les débordements des étages d'intégration doivent pouvoir être compensés de manière exacte par les étages de différentiation. En particulier, cela ne marche pas en virgule flottante.

Le paramètre R est fixé en fonction du rapport de décimation souhaité, et le paramètre N est libre, et peut être choisi en fonction du compromis suppression du repliement / atténuation dans la bande passante souhaité (en pratique, il est courant d'utiliser en dernier étage un filtre FIR de compensation pour corriger les défauts du filtre CIC, voir section 3 ci-après).

2.2 Réponse fréquentielle

Prenons un exemple concret, où l'on souhaite passer d'une fréquence d'entrée de 10 MHz à une fréquence de sortie de 625 KHz, soit un facteur de décimation de $R = 16$, et considérons un filtre CIC à 5 étages ($N = 5$).

Comme on peut le voir en figure 2 ci-après, l'atténuation du filtre est tout à fait satisfaisante dans les hautes fréquences ($>$ 60 dB à partir de 500 KHz), mais la bande passante en sortie (0 - 312 KHz) est sensiblement atténuée (voir figure de droite), et l'atténuation juste après la fréquence de Nyquist de sortie n'est pas très élevée (environ 20 dB), ce qui conduit à des repliements de spectre après décimation (voir figure du bas).

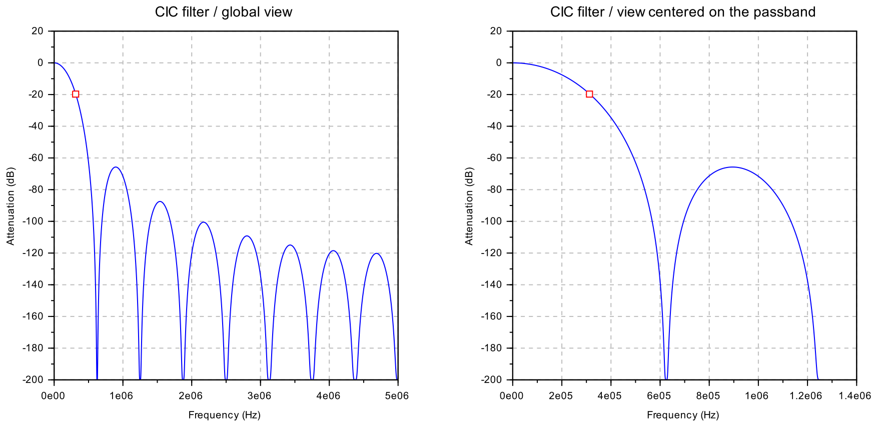

FIGURE 2 – *Décimation avec un filtre CIC, $R = 16$, $N = 5$ et $M = 1$ - Réponse fréquentielle avant décimation. Le carré rouge indique la fréquence de Nyquist de sortie ($= f_{Nyquist\ d'entrée}/R$). C'est après ce point que le repliement de spectre commence après la décimation (voir figure suivante).*

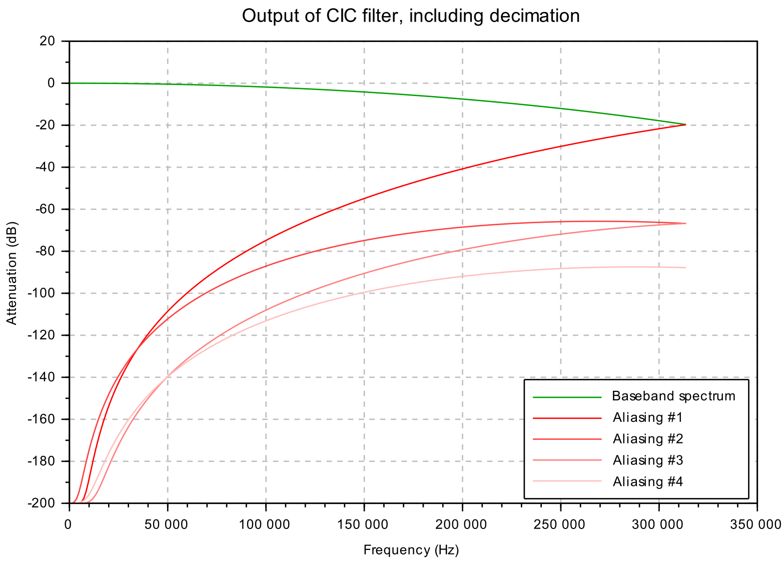

FIGURE 3 – *Décimation avec un filtre CIC, $R = 16$, $N = 5$ et $M = 1$ - Réponse fréquentielle après décimation (repliements de spectre)*

2.3 Résolution nécessaire pour les calculs

Soit k_1 la résolution en bits des données d'entrée (signées), et k_2 la largeur des registres de calcul du filtre CIC (registres entiers ou virgules fixes). Typiquement

k_2 doit être supérieur à k_1 pour que le filtre CIC fonctionne correctement, et nous allons calculer maintenant quelle est la marge de résolution $m = k_2 - k_1$ minimale nécessaire en fonction des paramètres du filtre.

Pour chaque étage du filtre (couple intégrateur / différenciateur), la contrainte à respecter est que l'intégrale sur un durée de RM échantillons successifs ne doit pas dépasser la dynamique maximale du registre de calcul (sinon le différenciateur $1 - z^{-RM}$ ne peut pas retrouver la valeur souhaitée), autrement dit :

$$RM \cdot 2^{k_1-1} < 2^{k_2} \Leftrightarrow RM < 2^{k_2-k_1+1}$$

(car le pire des cas apparait quand le signal est constant et vaut -2^{k_1-1}, c'est-à-dire la valeur de magnitude maximale que l'on peut représenter en entier signé).

Dans le cas général d'un filtre CIC à N étages, cette condition se généralise ainsi :

$$(RM)^N < 2^{k_2-k_1+1}$$

Soit :

$$\boxed{m = k_2 - k_1 > N \log_2 RM - 1} \tag{1}$$

À titre d'exemple, si $R = 16$, $N = 4$ et $M = 1$, et que les échantillons d'entrée sont 16 bits ($k_1 = 16$), alors la condition 1 donne $m > 15$, soit $k_2 = m+k_1 > 31$, autrement dit il faut utiliser des registres 32 bits.

Au delà, par exemple pour un rapport de décimation $R \geq 32$, on peut se rendre compte que des registres 32 bits ne sont plus suffisant, et on s'orientera alors de préférence (du moins pour une implémentation CPU ou DSP) vers la réalisation d'une cascade de plusieurs filtres CIC d'ordres inférieurs (par exemple, pour $R = 64$, deux filtres CIC successifs de rapports identique $R_1 = R_2 = 8$).

2.4 Complexité

Pour chaque échantillon d'entrée, il y a N additions / accumulations à effectuer (une pour chaque étage d'intégrateur), puis à un rythme R fois inférieur, N différences à effectuer, soit un coût global de :

$$C = N\left(1 + \frac{1}{R}\right) \sim N \quad \text{cycles par échantillon d'entrée}$$

Par exemple, si $R = 16, N = 4$, et $M = 1$, alors $C \sim 4$ cycles / échantillon.

3 Filtre de compensation

En contrepartie de leur simplicité de calcul, les filtres CIC présentent deux principaux défauts :

- Ils n'ont pas une réponse plate dans la bande passante
- Ils introduisent un repliement de spectre non négligeable car leur atténuation à proximité de la fréquence de Nyquist n'est souvent pas suffisamment importante

Par conséquent, on leur adjoint en général un dernier étage FIR, appelé filtre de compensation, dont le rôle est de :

1. Corriger la perturbation de la réponse dans la bande utile,
2. Supprimer dans la mesure du possible le repliement déjà introduit par le filtre CIC et aussi filtrer suffisamment au-delà de la fréquence de Nyquist cible afin d'empêcher le repliement avant la dernière décimation.

3.1 Conception d'un filtre de compensation

Une méthode courante consiste à concevoir un filtre FIR par la technique de l'échantillonnage fréquentiel [1], qui permet de réaliser un filtre ayant une réponse arbitraire dans le domaine fréquentiel (fonctions `fsfir` sous SCILAB, et `fir2` sous MATLAB). Cette méthode consiste tout simplement à effectuer une Transformée de Fourier Discrète Inverse (TFDI) sur le spectre souhaité.

En pratique, pour compenser un filtre CIC, on fixe la magnitude du spectre ainsi :

$$\begin{aligned} |H(j\nu)| &= \left|\frac{1}{H_{CIC}(j\nu)}\right| && \text{si } \nu < \nu_c \\ H(j\nu) &= 0 && \text{si } \nu > \nu_c \end{aligned}$$

où ν_c est la fréquence de coupure souhaitée. Autrement dit, on cherche à compenser la réponse du filtre CIC dans la bande utile, et on atténue les repliements de spectres résiduels en dehors de la bande utile [2].

Typiquement, la fréquence d'intérêt ν_c est significativement inférieure à la fréquence de Nyquist en sortie de filtre CIC, car sinon, il n'est pas possible de supprimer les repliements de spectres résiduels de ce filtre. Éventuellement, une dernière étape de décimation peut être effectuée à la sortie de ce filtre de compensation.

3.2 Exemple de filtre de compensation

A titre d'illustration, on a pris l'exemple du système sur-échantillonné suivant :

- Signal d'entrée échantillonné à 6.4 KHz
- Facteur de décimation CIC : $R = 16$ (400 Hz à la sortie du filtre CIC)
- Facteur de décimation à la sortie du filtre de compensation : $R_2 = 2$ (soit une fréquence de sortie finale de 200 Hz)
- Fréquence de coupure du filtre de compensation : 80 Hz

Le filtre de compensation a été conçu avec la **mini toolbox de conception CIC** (voir `http://www.tsdconseil.fr/log/scriptscilab/cic/index.html`), et les résultats ont été reproduits en figures 4 et 5 page suivante.

1. Notez que d'autres méthodes plus sophistiquées existent, voir par exemple en référence [1].
2. Note : en pratique, on peut introduire une transition plus douce entre la bande passante et la bande coupée du filtre (au niveau de $\nu = \nu_c$), de manière à avoir moins d'oscillations.

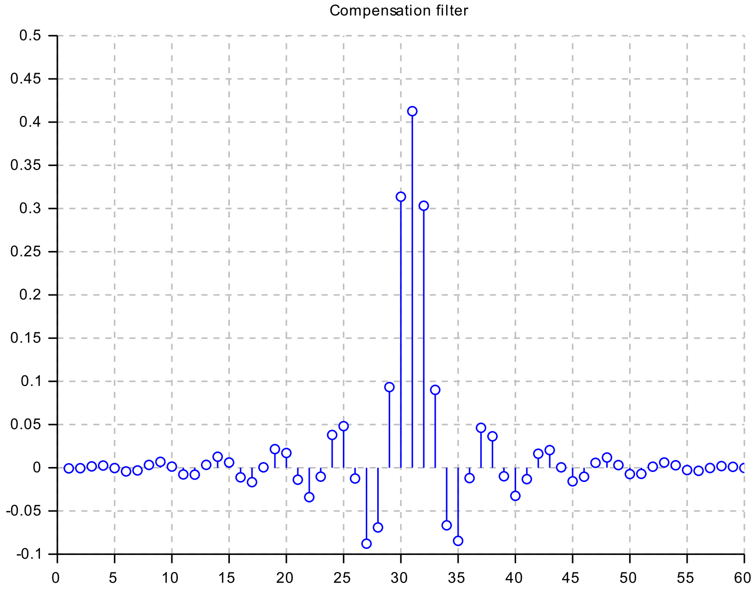

FIGURE 4 – *Exemple de filtre de compensation (réponse impulsionnelle du filtre FIR)*

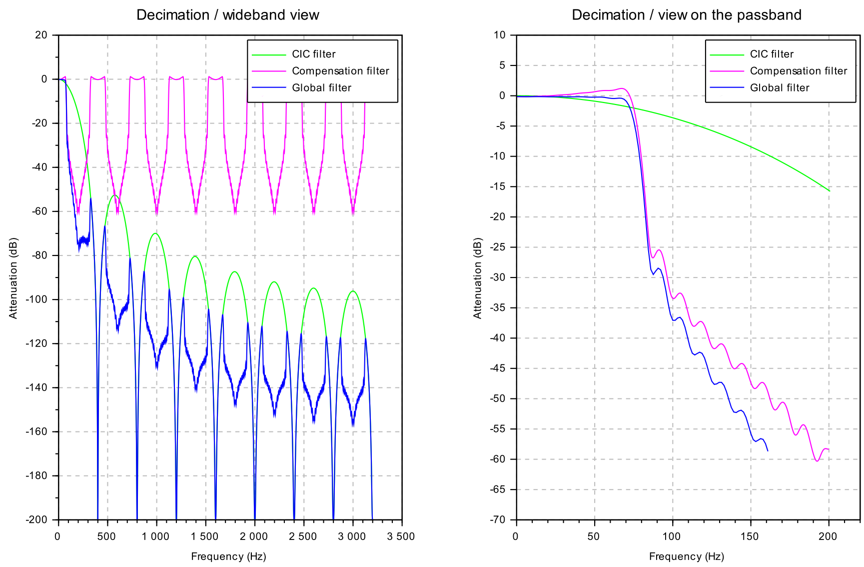

FIGURE 5 – *Exemple de filtre de compensation (réponse globale)*

4 Filtre CIC pour l'interpolation

En interpolation, il s'agit de filtrer passe-bas un signal qui a été préalablement sur-échantillonné (par insertion de zéros), de manière à supprimer les repliements de spectres créés par le sur-échantillonnage :

$$\text{Signal basse fréquence } (f_s) \longrightarrow \boxed{\uparrow R} \longrightarrow \boxed{h(z)} \longrightarrow \text{Signal haute fréquence } (Rf_s)$$

De la même manière que pour la décimation, pour une implémentation efficace, le filtre CIC $h(z)$ est factorisé en N étages d'intégrateurs et de différenciateurs, mais cette fois, ces derniers sont placés en première position, ce qui permet de décaler l'opération de sur-échantillonnage juste avant les intégrateurs :

$$\boxed{1 - z^{-M}} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \boxed{1 - z^{-M}} \longrightarrow \boxed{\uparrow R} \longrightarrow \boxed{\frac{1}{1-z^{-1}}} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \boxed{\frac{1}{1-z^{-1}}}$$

5 Réferences

[1] G. DOLECEK, J. CARMONA, *On design of CIC decimators*, 2012

[2] A. LOLOI, *Exploring decimation filters*, 2013

[3] ALTERA, *AN 455 - Understanding CIC compensation filters*, 2007